الهندسة

مذكرة رقم 2 : ملخص لدرس: الحساب المتجهي في المستوى مع تمارين وأمثلة محلولة

الأهداف والقدرات المنتظرة من الدرس :

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
- تساوي متجهتين، جمع متجهتين، علاقة شال؛ - ضرب متجهة في عدد حقيقي؛ - استقامية متجهتين، استقامية ثلاث نقط؛ - تحديد متجهي لمنتصف قطعة.	- إنشاء متجهة من الشكل $a\vec{u}+b\vec{v}$. - التعبير عن مفاهيم وخاصيات الهندسة التآلفية باستعمال الأداة المتجهية، والعكس. - حل مسائل هندسية باستعمال الأداة المتجهية.	- يتم التذكير بمفهومي جمع متجهتين وضرب متجهة في عدد حقيقي ثم تقديم الخاصيات $(a+b).\vec{u}=a.\vec{u}+b.\vec{u}$ و $a.(\vec{u}+\vec{v})=a.\vec{u}+a.\vec{v}$ و $a.(b.\vec{u})=(ab).\vec{u}$ من خلال أنشطة بسيطة. كما ينبغي ربط ضرب متجهة $\overrightarrow{AB}$ في عدد حقيقي x بالنقطة M من المستقيم (AB) التي أفصولها x في المعلم (A,B) أي أن $\overrightarrow{AM}=x.\overrightarrow{AB}$ وبالتأويل المتجهي لاستقامية ثلاث نقط.

I. متجهات المستوى: (تذكير)

1. عناصر متجهة:

A و B نقطتان مختلفتان. إذا رمزنا لمتجهة $\overrightarrow{AB}$ بالرمز $\vec{u}$ فان:

1. اتجاه $\vec{u}$ هو المستقيم (AB).
2. منحى $\vec{u}$ هو المنحى من A إلى B.
3. منظم $\vec{u}$ هو المسافة AB , و نكتب: $\|\vec{u}\|=AB$

حالة خاصة: المتجهة $\overrightarrow{AA}$ ليس لها اتجاه و منظمها منعدم و تسمى المتجهة المنعدم, و تكتب $\overrightarrow{AA}=\vec{O}$.

خاصية: $\vec{u}$ متجهة و A نقطة من المستوى, توجد نقطة وحيدة M بحيث $\overrightarrow{AM}=\vec{u}$.

2. تساوي متجهتين:

تعريف: نقول إن متجهتين متساويتين إذا كان لهما نفس الاتجاه و نفس المنحى و نفس المنظم.

3. مقابل متجهة:

تعريف: لتكن $\vec{u}$ متجهة غير منعدمة. مقابلة المتجهة $\vec{u}$ هي المتجهة التي لها نفس الاتجاه و نفس المنظم و منحناها عكس منحى المتجهة $\vec{u}$, و يرمز لها بالرمز $-\vec{u}$. ولدينا $-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$

خاصية: ليكن $ABCD$ رباعيا. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ تكافئ $ABCD$ متوازي أضلاع.

4. مجموع متجهتين: علاقة شال: A و B نقطتان من المستوى.

لكل نقطة C من المستوى. لدينا: $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$.

مثال: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=0$

تمرين 1: نعتبر المتجهتين $\vec{U}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}$ و $\vec{V}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{FA}$

بسط المتجهتين $\vec{U}$ و $\vec{V}$

الجواب: $\vec{U}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}$

$\vec{U}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BB}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}$

$\vec{V}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DF}$

$\vec{V}=\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{BB}+\overrightarrow{EF}=\vec{0}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EF}$

قاعدة متوازي الأضلاع لإنشاء مجموع متجهتين:

O و A و B ثلاث نقط غير مستقيمية.

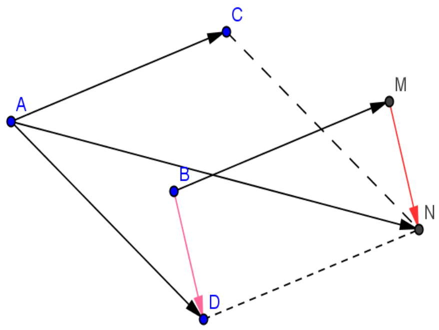
مجموع المتجهتين $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ هو المتجهة $\overrightarrow{OC}$ بحيث يكون الرباعي $OACB$ متوازي الأضلاع.

تمرين 2: لتكن A و B و C و D ثلاث نقط من المستوى

1) أنشئ النقط M و N بحيث: $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$

2) قارن المتجهتين : $\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{MN}$

الجواب: 1)



1) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$

ومنه: $\overrightarrow{MN}=-\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{MN}=-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$

تمرين 3 : ABC مثلث و M نقطة من المستوى

نعتبر النقط D و E بحيث: $\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{CA}$

ماهي طبيعة الرباعيين $ABCD$ و $ACBE$ ؟

الجواب: 1) $\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BC}$ يعني $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BC}$

يعني $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ ومنه $ABCD$ متوازي الأضلاع

2) $\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{CA}$ يعني $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}$

يعني $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}$ يعني $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}$ يعني $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CB}$

ومنه $ACBE$ متوازي الأضلاع

تمرين 4: ليكن ABC مثلث و لتكن E منتصف القطعة $[BC]$

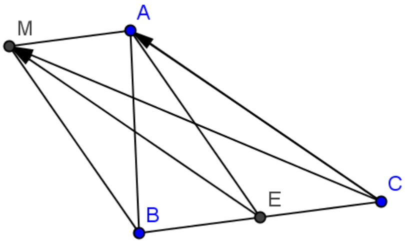
و M نقطة من المستوى حيث: $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CE}$

1) أرسم شكلا. 2) بين أن: $ACEM$ متوازي الأضلاع

3) بين أن: $AEBM$ متوازي الأضلاع

الجواب: 1)

أنظر الشكل



2)مثلا يكفي ان نبين أن: $\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{AC}$ ؟؟؟؟؟؟

لدينا : $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CE}$ يعني $\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CE}$

يعني $\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{CA}$ يعني $-\overrightarrow{ME}=-\overrightarrow{AC}$ يعني $\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{AC}$

ومنه $ACEM$ متوازي الأضلاع

3)مثلا يكفي ان نبين أن: $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{MB}$ ؟؟؟؟؟؟

لدينا : $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{ME}$ يعني $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BE}$

ونعلم أن : E منتصف القطعة $[BC]$ اذن : $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{EC}$

ومنه $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{MB}$ وبالتالي : $AEBM$ متوازي الأضلاع

II.ضرب متجهة في عدد حقيقي:

1. **تعريف:** لتكن $\vec{u}$ متجهة غير منعدمة و k عددا حقيقيا غير منعدم.

ضرب المتجهة $\vec{u}$ في العدد الحقيقي k هي المتجهة التي نرمز لها بالرمز: $k\vec{u}$ و المعرفة كما يلي:

- لها نفس اتجاه المتجهة $\vec{u}$.
- لها نفس منحى المتجهة $\vec{u}$ في حالة: $k \succ 0$ و لها منحى معاكس للمتجهة $\vec{u}$ في حالة: $k \prec 0$
- منظمها يساوي $|k|\times\|\vec{u}\|$.

مثال: A و B نقطتان من المستوى بحيث : $AB=1cm$

1) أرسم النقطتين C و D بحيث : $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}=-3\overrightarrow{AB}$

2)أحسب المسافتين : AC و AD

الأجوبة : (1

2) لدينا $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$ اذن : $\|\overrightarrow{AC}\|=\|2\overrightarrow{AB}\|$

اذن : $AC=|2|AB$ اذن : $AC=2AB$ اذن : $AC=2cm$

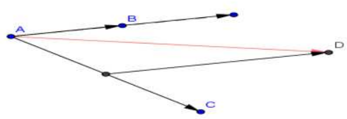
لدينا $\overrightarrow{AD}=-3\overrightarrow{AB}$ اذن : $\|\overrightarrow{AD}\|=\|-3\overrightarrow{AB}\|$

اذن : $Ad=|-3|AB$ اذن : $AD=3AB$ اذن : $AD=3cm$

تمرين 5 : لتكن A و B و C ثلاث نقط غير مستقيمية.

أنشئ النقطة D بحيث $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

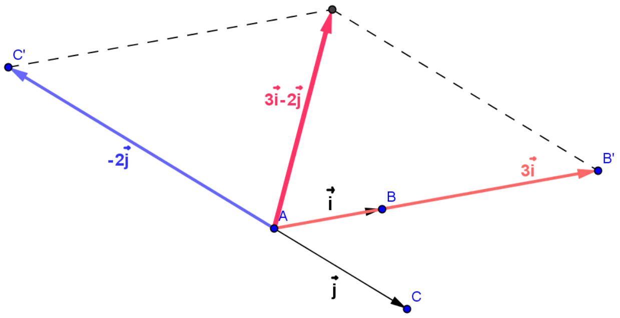
الجواب :



تمرين 6 : ABC مثلث و نضع : : $\overrightarrow{AB}=\vec{i}$ و $\overrightarrow{AC}=\vec{j}$

أنشئ المتجهات التالية : $3\vec{i}$ و $-2\vec{j}$ و $3\vec{i}-2\vec{j}$

الجواب :



2. **خاصيات:** لكل متجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و لكل عددين حقيقيين k و k'

لدينا: $(k+k')\vec{u}=k\vec{u}+k'\vec{u}$ و $k(k'\vec{u})=(kk')\vec{u}$

و $k(\vec{u}+\vec{v})=k\vec{u}+k\vec{v}$ و $1\cdot\vec{u}=\vec{u}$

$k\vec{u}=\vec{0}$ تكافئ $k=0$ أو $\vec{u}=\vec{0}$.

$0\cdot\vec{u}=\vec{0}$ و $k\cdot\vec{0}=\vec{0}$

أمثلة: $5\overrightarrow{AB}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}=\left(5-\frac{3}{2}\right)\overrightarrow{AB}=\frac{7}{2}\overrightarrow{AB}$

$2\left(\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}\right)=\left(2\times\frac{3}{2}\right)\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AB}$

$2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}=2\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)=2\overrightarrow{AC}$

$2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ تكافئ أن $\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ أي أن: $A=B$

تمرين 7 : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتان. نضع: $\vec{w}=\frac{3}{5}\left(5\vec{u}-\frac{7}{2}\vec{v}\right)-6\left(\vec{u}+\frac{1}{10}\vec{v}\right)$

أوجد عددين حقيقيين x و y بحيث: $\vec{w}=x\vec{u}+y\vec{v}$.

الجواب : $\vec{w}=\frac{3}{5}\left(5\vec{u}-\frac{7}{2}\vec{v}\right)-6\left(\vec{u}+\frac{1}{10}\vec{v}\right)=3\vec{u}-\frac{21}{10}\vec{v}-6\vec{u}-\frac{3}{5}\vec{v}$

$\vec{w}=-3\vec{u}-\frac{27}{10}\vec{v}$ ومنه $x=-3$ و $y=-\frac{27}{10}$

3. **استقامية متجهتين-استقامية ثلاث نقط:**

تعريف: لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين.

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان إذا وجد عدد حقيقي k غير منعدم حيث: $\vec{v}=k\vec{u}$

المتجهة المنعدمة مستقيمية مع جميع المتجهات.

تمرين 8 : ليكن ABC مثلثا. ولتكن النقطة D حيث $\overrightarrow{BD}=3\overrightarrow{DC}$.

1.بين أن: $\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{BC}$ مستقيميتين

2.أنشئ النقطة D

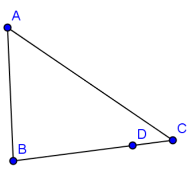
الجواب: (1 لدينا $\overrightarrow{BD}=3\overrightarrow{DC}$ تكافئ $\overrightarrow{BD}=3\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC}\right)$

تكافئ $\overrightarrow{BD}=3\overrightarrow{DB}+3\overrightarrow{BC}$ تكافئ $\overrightarrow{BD}-3\overrightarrow{DB}=3\overrightarrow{BC}$

تكافئ $\overrightarrow{BD}+3\overrightarrow{BD}=3\overrightarrow{BC}$ تكافئ $4\overrightarrow{BD}=3\overrightarrow{BC}$ تكافئ $\overrightarrow{BD}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$

وبالتالي: $\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{BC}$ مستقيميتين

2) $\overrightarrow{BD}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ ومنه الانشاء



خاصية: لتكن A و B و C و D أربع نقط حيث $A\neq B$ و $C\neq D$.

$\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مستقيميتان إذا و فقط إذا كان (AB) و (CD) متوازيين

خاصية: تكون النقط A و B و C مستقيمية إذا و فقط إذا كانت $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مستقيميتين.

مثال: في كل شبه منحرف $ABCD$ قاعدتاه $[AB]$ و $[CD]$.

لدينا المتجهتان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مستقيميتان.

تمرين 9 : نعتبر النقط A و B و M بحيث: $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

1. بين أن: $\overrightarrow{AM}=\frac{6}{5}\overrightarrow{AB}$ ماذا تستنتج بالنسبة للمتجهتين $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AB}$

2. استنتج أن النقطة M تنتمي إلى المستقيم (AB).

الجواب (1: $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ يعني $2\overrightarrow{MA}+3\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)+3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ يعني $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MA}+6\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

يعني $5\overrightarrow{MA}=-6\overrightarrow{AB}$ يعني $-5\overrightarrow{AM}=-6\overrightarrow{AB}$ يعني $\overrightarrow{AM}=\frac{6}{5}\overrightarrow{AB}$

اذن المتجهتين $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AB}$ مستقيميتين

2) $\overrightarrow{AM}=\frac{6}{5}\overrightarrow{AB}$ تعنى أن النقط A و B و M مستقيمية وأن M تنتمي إلى المستقيم (AB).

III. منتصف قطعة:

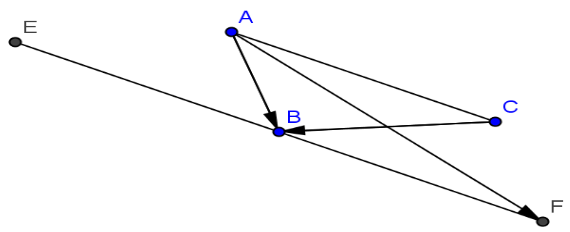
خاصية1: I منتصف القطعة $[AB]$ إذا و فقط إذا كانت I تحقق إحدى المتساويتين: (1) $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$ أو (2) $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AI}$ أو $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

تمرين 10 : ABC مثلث و E و F نقطتين بحيث : : $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CB}$ و $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

1)أنشئ شكلا تقريبيا

2)بين أن B منتصف القطعة $[EF]$.

أجوبة (1:



2)يكفي مثلا أن نبين أن : $\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{BF}=\vec{0}$ ؟؟؟؟؟

$\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}$ حسب علاقة شال

$\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ باستعمال المعطيات

$\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$ لأن : $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

ودائما حسب علاقة شال نجد $\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BB}=\vec{0}$

وبالتالي B منتصف القطعة $[EF]$.

خاصية2: (الخاصية المميزة لمنتصف قطعة): I منتصف القطعة $[AB]$ لكل نقطة M من المستوى لدينا: $2\overrightarrow{MI}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$. **برهان:** لتكن M نقطة من المستوى.

لدينا: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)=2\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=2\overrightarrow{MI}$

(لأن $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$)

و منه لكل نقطة M من المستوى لدينا: $2\overrightarrow{MI}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$

خاصية3(خاصية منتصفي ضلعي مثلث)

لتكن ABC مثلثا. إذا كان I منتصف القطعة $[AB]$ و J منتصف القطعة $[AC]$ فان: $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

برهان: لتكن ABC مثلثا. I و J هما على التوالي منتصفي القطعتين $[AB]$ و $[AC]$.

لدينا: $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AJ}$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

ملاحظة : $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ **تعني أن المتجهتين** $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{BC}$ مستقيميتين

ومنه : $(IJ)\parallel(BC)$

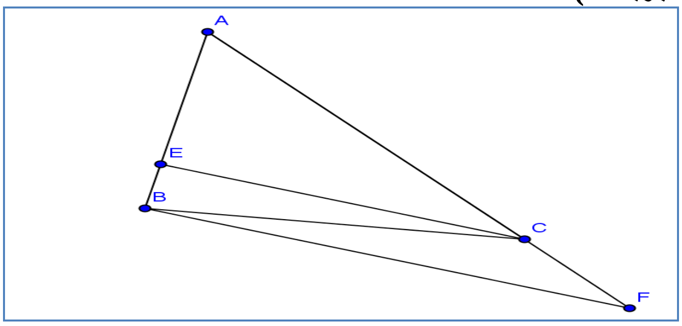
تمرين 11 : ABC مثلث و E و F نقطتان حيث: $\overrightarrow{AE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AF}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$.

1)أنشئ الشكل.

2)أكتب كلا من المتجهتين $\overrightarrow{EC}$ و $\overrightarrow{BF}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

3)استنتج أن المستقيمين (BF) و (EC) متوازيان.

أجوبة (1:



2) $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AC}$ حسب علاقة شال اذن: $\overrightarrow{EC}=-\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AC}$

يعني $\overrightarrow{EC}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ يعني $\overrightarrow{EC}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ و هي النتيجة المطلوبة

ولدينا $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}$ حسب علاقة شال اذن: $\overrightarrow{BF}=-\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$ و هي النتيجة المطلوبة

3)وجدنا $\overrightarrow{EC}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ اذن: $\overrightarrow{EC}=\frac{3}{4}\left(-\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}\right)$

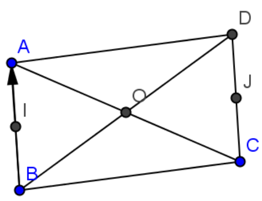
اذن: $\overrightarrow{EC}=\frac{3}{4}\left(\overrightarrow{BA}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}\right)$ يعني $\overrightarrow{EC}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BF}$

اذن :المستقيمين (BF) و (EC) متوازيان.

تمرين 12 :لتكن $ABCD$ متوازي أضلاع مركزه O. I و J هما على التوالي منتصفي القطعتين $[AB]$ و $[CD]$.

1)بين أن: $\overrightarrow{OJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

2)استنتج أن O هو منتصف القطعة $[IJ]$.



أجوبة (1:

نعتبر المثلث ABC لدينا I منتصف القطعة $[AB]$ و O منتصف القطعة $[AC]$ اذن حسب خاصية لدينا : $\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

ونعتبر المثلث ACD لدينا J منتصف القطعة $[DC]$ و O منتصف القطعة $[AC]$ اذن حسب خاصية لدينا : $\overrightarrow{OJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

2)لكي نبين أن : O هو منتصف القطعة $[IJ]$ يكفي أن نبين أن : $\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ}=\vec{0}$ ؟؟؟؟؟؟؟

$\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

وبما أن $ABCD$ متوازي أضلاع فان : $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$

ومنه : $\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\vec{O}$

وبالتالي : O هو منتصف القطعة $[IJ]$.

<u>تمرين 13:</u> ليكن $ABCD$ متوازي أضلاع و E و F نقطتان حيث:

$\overrightarrow{DE}=\frac{5}{2}\overrightarrow{DA}$ و $\overrightarrow{CF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$

1)بين أن: $\overrightarrow{BE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}$

2)بين أن: $2\overrightarrow{BE}+3\overrightarrow{BF}=\vec{0}$

ماذا تستنتج بالنسبة للنقط F و B و E ؟

أجوبة :1) أ)حسب علاقة شال $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}$

وبما أن $ABCD$ متوازي أضلاع فان : $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$

ونعلم أن : $\overrightarrow{DE}=\frac{5}{2}\overrightarrow{DA}$

اذن : $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BA}+\frac{5}{2}\overrightarrow{DA}=-\overrightarrow{DA}+\frac{5}{2}\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BA}=\frac{3}{2}\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{AB}$

ب)حسب علاقة شال $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}$ اذن : $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$

(2 $2\overrightarrow{BE}+3\overrightarrow{BF}=2\left(\frac{3}{2}\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{AB}\right)+3\left(\overrightarrow{BC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}\right)$

$=3\overrightarrow{DA}-2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{DC}$ وبما أن $ABCD$ متوازي أضلاع

فان : $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}$ و $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$

اذن : $2\overrightarrow{BE}+3\overrightarrow{BF}=3\overrightarrow{CB}-2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

الاستنتاج: $2\overrightarrow{BE}+3\overrightarrow{BF}=\vec{0}$ يعني $\overrightarrow{BE}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{BF}$

ومنه النقط F و B و E مستقيمية

<u>ملاحظات عامة حول الدرس :</u>